

Exercices – Séquence n° 5 – ESPACE (I) :

vecteurs, droites et plans

Contenus

- Vecteurs de l'espace, translations, combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
- Droites de l'espace, vecteurs directeurs d'une droite, vecteurs colinéaires.
- Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
- Plan de l'espace, direction d'un plan de l'espace.
- Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- Bases et repères de l'espace, décomposition d'un vecteur sur une base.

Capacités

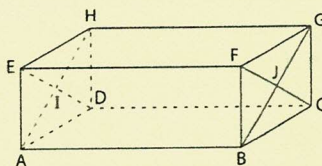
- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan ou trois vecteurs de l'espace forment une base.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations de l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER**Vecteurs de l'espace****Exercice 1** [Re]

ABCDEFGH est le pavé droit représenté ci-contre.

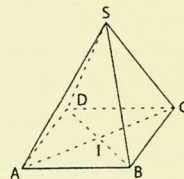
I et J sont les centres respectifs des faces ADHE et BCGF.

- 1) Donner trois vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FG}$.
- 2) Quelle est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{FJ}$?

**Exercice 2** [Ra]

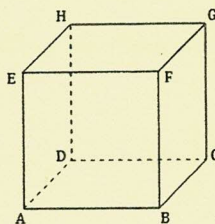
SABCD est une pyramide de sommet S dont la base est le parallélogramme ABCD de centre I.

- 1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{SI}$.
- 2) En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{SI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BS}$.

**Exercice 3** [Re]

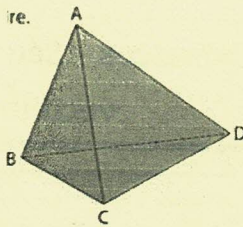
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. Construire les points M, N, P et Q tels que :

- 1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$
- 2) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$
- 3) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG}$
- 4) $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$



Exercice 4 [Re-Ra]

ABCD est le tétraèdre ci-contre.

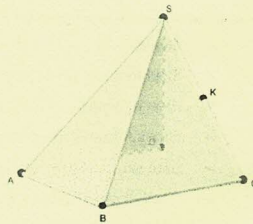


- 1) Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$.
- 2) Placer le point I milieu de l'arête [AD].
- 3) Construire les points E, F, G, H et K définis par les combinaisons linéaires suivantes :
 a. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$; b. $\overrightarrow{IF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$; c. $\overrightarrow{GA} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{BD}$; d. $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$; e. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
- 4) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{EF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 5 [Ch-Ra]

SABCD est la pyramide de base le parallélogramme ABCD ci-contre.
 K est le milieu de l'arête [SC].

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{SC}$.



Droites de l'espace

Exercice 6 [Re-Ra]

ABCD est un tétraèdre.

I est le milieu de [BC], les points E, F et G sont définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

- 1) Réaliser une figure.
- 2) Démontrer que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$.
- 3) Le point E appartient-il à la droite (FG) ? Justifier.

Exercice 7 [Re-Ra]

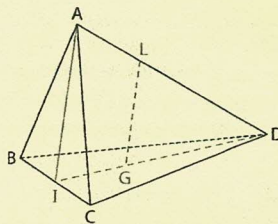
ABCD est le tétraèdre ci-contre.

I est le milieu de l'arête [BC].

G est le centre de gravité du triangle BCD.

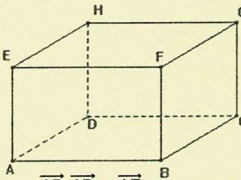
L est le point tel que : $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

- 1) Démontrer que les droites (AI) et (LG) sont parallèles.
- 2) Construire les points R, S et T définis par :
 $\overrightarrow{AR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CT} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{CA}$.
- 3) Le point R appartient-il à la droite (ST) ? Justifier.



Exercice 8 [Re-Ra]

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle ci-contre.

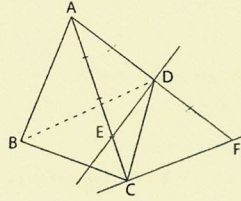


- 1) Construire les points I et J définis par : $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$ et $\vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{BF}$.
- 2) Décomposer chacun des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.
- 3) En déduire si les droites (IJ) et (AG) sont parallèles ? coplanaires ?

Exercice 9 [Ra]

ABCD est le tétraèdre ci-contre.

Les points E et F sont définis par : $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AC}$ et $\vec{DF} = \vec{AD}$.



- 1) Justifier que les droites (DE) et (CF) sont coplanaires.
- 2) Démontrer que ces deux droites sont sécantes.

Plans de l'espace

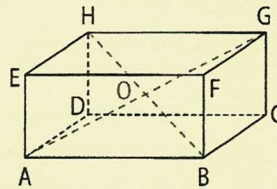
Exercice 10 [Ra]

ABCD est un tétraèdre et M est le point défini par : $\vec{AM} = 3\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{AD}$.

- 1) Exprimer le vecteur $\vec{BM}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$.
- 2) À quel plan contenant une face du tétraèdre le point M appartient-il ?

Exercice 11 [Re-Ra]

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle de centre le point O.



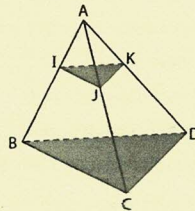
- 1) Démontrer que les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{GE}$ et $\vec{DH}$ sont coplanaires.
- 2) Les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{GE}$ et $\vec{DA}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
- 3) Construire les points I et J définis par : $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AD}$ et $\vec{DJ} = \frac{1}{3}\vec{DH}$.
- 4) Démontrer que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{BC}$ et $\vec{BF}$ sont coplanaires.
- 5) En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (BCG).

Exercice 12 [Ra]

ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont les points définis par :

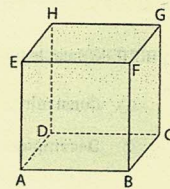
$$\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \quad \vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AD}.$$

Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



Exercice 13 [Re-Ra]

ABCDEFGH est le cube ci-contre.



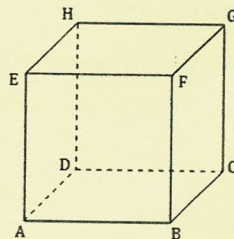
- 1) Construire les points I, J et K définis par :
 $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$; $\vec{AJ} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AE}$; $\vec{AK} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}$.
- 2) Démontrer que les droites (IJ) et (BE) sont parallèles ainsi que les droites (JK) et (BC).
- 3) Démontrer que les plans (J ; $\vec{IJ}$, $\vec{JK}$) et (B ; $\vec{BC}$, $\vec{BE}$) sont parallèles.

Bases et repères de l'espace

Exercice 14 [Ra-Ca-Co]

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

Soient I, J et K les points définis par : $\vec{DI} = \frac{1}{2}\vec{DC}$, $\vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{BG}$ et $\vec{EK} = \frac{3}{2}\vec{EF}$.



- 1) Donner une base du plan (BCG).
- 2) Justifier que les vecteurs $\vec{DC}$, $\vec{CB}$ et $\vec{BF}$ forment une base de l'espace.
- 3) Décomposer les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{JK}$ dans cette base.
- 4) Que peut-on en déduire pour les points I, J et K ?

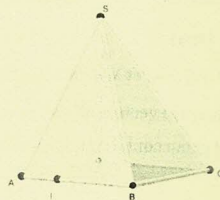
Exercice 15 [Ra]

SABCD est la pyramide ci-contre dont la base est le quadrilatère ABCD.

I est un point du segment [AB] distinct de A et de B.

Dans chaque cas, dire si le triplet de vecteurs est une base de l'espace. Justifier.

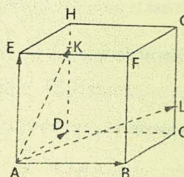
- a. $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AS})$; b. $(\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SI})$; c. $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$; d. $(\vec{SA}, \vec{SC}, \vec{SD})$.

**Exercice 16** [Ra]

ABCDEFGH est le cube ci-contre.

K et L sont les points tels que : $\vec{DK} = \frac{3}{4}\vec{DH}$ et $\vec{GL} = \frac{2}{3}\vec{GC}$.

- 1) Décomposer les vecteurs $\vec{AK}$ et $\vec{AL}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
- 2) En déduire les coordonnées des points K et L dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
- 3) Donner enfin les coordonnées des 8 sommets du cube dans ce même repère.

**Exercice 17** [Ra-Ca-Co]

Dans un repère de l'espace, on considère les points suivants : A(1 ; 5 ; 2) ; B(-2 ; 3 ; 4) ; C(-2 ; -2 ; 0) et D(7 ; -3 ; 1).

- 1) ABDC est-il un parallélogramme ?
- 2) Calculer les coordonnées du milieu de [AB].
- 3) Déterminer les coordonnées de K tel que ABCK soit un parallélogramme.
- 4) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AB} - 3\vec{CD}$.
- 5) Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?
- 6) E est le point de coordonnées $(2 ; \frac{17}{3} ; \frac{4}{3})$. Les points A, B et E sont-ils alignés ?
- 7) Calculer les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à B.

Exercice 18 [Ra-Ca-Co]

Dans un repère de l'espace, on donne le point $A(-1; 2; 3)$; les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 3)$ et $\vec{v}(0; 1; 3)$.

- 1) Justifier que le couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ définit une direction d'un plan.
- 2) Soit P le plan $(A; \vec{u}, \vec{v})$.
 - a. Démontrer que le point $B(1; -1; 0)$ appartient au plan P .
 - b. Le point $C(-2; 7; 10)$ appartient-il au plan P ? Justifier.
- 3) Soit les vecteurs $\vec{w}(2; -1; 3)$ et $\vec{t}(2; 1; -5)$.
 - a. Calculer les coordonnées du vecteur $2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ et en déduire que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
 - b. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{t}$ sont-ils coplanaires?

Exercice 19 [Ra-Ca-Co]

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points : $A(0; 0; 1)$, $B(-3; 0; 0)$, $C(-1; -2; 0)$, $D(6; 0; -1)$ et $E(0; 3; 1)$.

- 1) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan, on le note P_1 .
- 2) Démontrer que les points O, D et E déterminent aussi un plan, on le note P_2 .
- 3) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas coplanaires.
- 4) Que peut-on en déduire pour les plans P_1 et P_2 ?

Exercice 20 [Ra-Ca-Co]

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace :

P_1 est le plan qui passe par le point $A(1; 0; -1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(2; 1; -1)$ et $\vec{v}(0; 2; 1)$.

P_2 est le plan qui passe par le point $B(-2; 3; 5)$ et de vecteurs directeurs $\vec{t}(-2; 5; 4)$ et $\vec{w}(4; 0; -3)$.

- 1) Démontrer que chacun des vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{w}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- 2) Que peut-on en déduire pour les plans P_1 et P_2 ?
- 3) Le point B appartient-il au plan P_1 ? Justifier.
- 4) En déduire la position relative des plans P_1 et P_2 .

Exercice 21 [Ca]

Soit $ABCD$ un tétraèdre. I est le milieu de $[CD]$, J est le milieu $[AI]$ et M et H sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}.$$

- 1) Justifier que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.
- 2) Décomposer alors chacun des vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ dans cette base.
- 3) Que peut-on en déduire quant à la position relative des droites (MH) et (BJ) ?

Exercice 22 [Ra-Co]

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-2; 1; 1)$, $B(-4; 0; -5)$, $C(0; 3; -1)$, $D(1; 0; -2)$ et $E(1; 0; -5)$.

On note $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Affirmation 1 : « Le point B appartient à $\mathcal{P}$. »

Affirmation 2 : « Le point A est un point de la droite qui passe par C et dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur. »

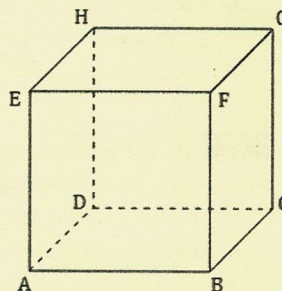
Affirmation 3 : « La droite d qui passe par le point D et de vecteur directeur $\vec{v}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$. »

Affirmation 4 : « Le plan $\mathcal{P}'$ qui passe par le point E et de vecteurs directeurs $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est parallèle à $\mathcal{P}$. »

Exercice 23 [Ra-Ca-Co] D'après Bac, Centres étrangers 2012

Soit ABCDEFGH le cube ci-contre.

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Partie A :

- 1) Construire les points I, J et K tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{AE}$$

- 2) Déterminer les coordonnées de chacun des points I, J et K.
 3) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites (IJ) et (IK).
 4) L est un point de l'arête [CD].
 a. Justifier que les coordonnées de L sont de la forme $(a; 1; 0)$ où a est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.
 b. Pour quelle valeur de a , le point L appartient-il au plan (IJK) ?

Partie B :

Dans cette partie, on pose $a = \frac{1}{4}$; le point L a alors pour coordonnées $(\frac{1}{4}; 1; 0)$.

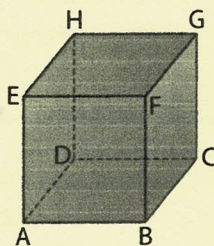
- 5)
 a. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
 b. Quelle est la position relative des droites (IJ) et (KL) ?
 c. Calculer les coordonnées du centre du parallélogramme IKJL.
 6)
 a. Démontrer que les droites (IJ) et (BH) sont sécantes.
 b. Le centre du cube appartient-il au plan (IJK) ?
 7)
 a. Déterminer le point M de la droite (HG) tel que les droites (MF) et (IL) soient parallèles.
 b. Justifier que la droite (MF) est parallèle au plan (IJK).

Pour réviser

Exercice 24 [Re]

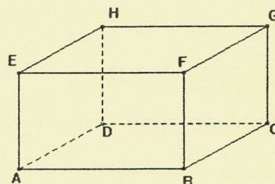
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. Sur la figure ci-contre, construire les points P, Q, R et S tels que :

- 1) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$
- 2) $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$
- 3) $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- 4) $\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

**Exercice 25** [Re-Ra-Ca]

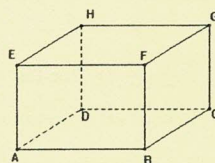
ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle ci-dessous.

- 1) Placer I le milieu de l'arête [BC] et J le milieu de l'arête [HG].
- 2) Compléter chaque combinaison linéaire par le point de la figure qui convient.
 - a. $\overrightarrow{FI} = 2\overrightarrow{IC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$; b. $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF}$;
 - c. $\overrightarrow{GI} = -\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; d. $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.
- 3) Construire les points K et L définis par : $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HE}$.
- 4) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{HL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.

**Exercice 26** [Re-Ra]

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle ci-contre.

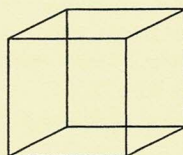
- 1) Par simple observation, déterminer les positions relatives des droites suivantes :
 - a. (AB) et (HC) ; b. (AF) et (DG) ; c. (EH) et (BF) ; d. (AH) et (CD).
- 2) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.
- 3) Construire le point P tel que : $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FG}$.
- 4) Démontrer que les droites (AP) et (HF) sont parallèles.

**Exercice 27** [Re-Ra-Co]

ABRICOTS est un cube.

M, N et G sont les milieux respectifs de [BA], [BO] et [IS] ; P et K sont les milieux respectifs de [MB] et [NO].

- 1) Exprimer $\overrightarrow{PK}$ puis $\overrightarrow{TG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BO}$.
- 2) Les vecteurs $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{TG}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
- 3) Conclure sur les positions relatives des droites (PK) et (TG).

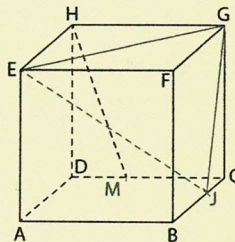


Exercice 28 [Ra-Co]

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

M et J sont les points définis par : $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

- 1) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{HM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GJ}$.
- 2) En déduire la position relative de la droite (HM) et du plan (EGJ).

**Exercice 29** [Ra-Ca-Co]

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) On considère les points $A(1; 0; -1)$, $B(2; 1; 2)$, $C(1; 0; 1)$ et $D(3; 2; 7)$.
 - a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont-ils colinéaires ?
 - b. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
- 2) On considère les points $E(1; 2; 7)$, $F(-3; -2; 3)$, $G(0; 5; 22)$ et $H(4; 0; -10)$.
 - a. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils colinéaires ?
 - b. Les points E, F, G et H sont-ils coplanaires ?

Exercice 30 [Ra-Ca-Co]

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $E(0; -2; 1)$, $F(3; -2; 0)$ et $G(-3; 2; 0)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Démontrer que $(E; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère de l'espace.
- 2) Déterminer les coordonnées des points F et G dans ce repère.
- 3) Les points E, F et G sont-ils alignés ?

Pour aller plus loin
Exercice 31 [Ch-Ra-Ca-Co]

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; 3)$ et $C(6; 3; 8)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
- 2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 3) En déduire les coordonnées du point C dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 32 [Ch-Ra-Ca-Co]

ABCDEFGH est le cube ci-contre.

I est le milieu de l'arête [EA].

J est le centre de la face CDHG.

P et Q sont les points définis par :

$$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

K est le milieu du segment [PQ].

Démontrer que les points I, J et K sont alignés par deux méthodes différentes.

Exercice 33 [Ch-Re-Ra-Ca-Co] Barycentre d'un système de points pondérés**Partie A : barycentre de deux points pondérés**

Soient A et B deux points de l'espace et, a et b deux nombres réels tels que $a + b \neq 0$.

- 1) a. M désigne un point de l'espace. Démontrer que : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
- b. En déduire qu'il existe un unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

G est appelé le **barycentre** des points pondérés (A, a) et (B, b).

- 2) a. Démontrer que si G est barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), alors pour tout réel k non nul, G est barycentre des points pondérés (A, ka) et (B, kb).
- b. Que peut-on dire du point G lorsque $a = b$?

3) Application

Soit [AB] un segment de longueur 6 cm. Dans chaque cas, construire le barycentre indiqué :

- a. G_1 est le barycentre de (A, 2) et (B, 1).
- b. G_2 est le barycentre de (A, 7) et (B, -1).
- c. G_3 est le barycentre de (A, -6) et (B, -2).

Partie B : barycentre de trois, quatre points pondérés

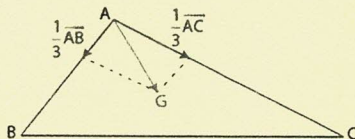
Soient A, B et C trois points de l'espace et, a , b et c trois nombres réels tels que $a + b + c \neq 0$.

- 1) Démontrer qu'il existe un unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

G est appelé le **barycentre** des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).

Remarque : on peut étendre cette définition à quatre points de l'espace.

- 2) a. Démontrer que si G est barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c), alors pour tout réel k non nul, G est barycentre des points pondérés (A, ka), (B, kb) et (C, kc).
- b. Dans le cas où $a = b = c$, démontrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
G est appelé le **centre de gravité** du triangle ABC.



- 3) On suppose que G est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) et que H est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) avec $a + b \neq 0$.
Démontrer que G est le barycentre des points pondérés (H, $a + b$) et (C, c).
Remarque : cette propriété s'appelle **propriété d'associativité des barycentres**.
- 4) Dans un repère de l'espace, on donne les coordonnées des points A, B et C :
 $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$.
Calculer les coordonnées du point G en fonction des coordonnées de A, B et C.

5) Application

ABC est un triangle de centre de gravité G. I est le milieu du côté [BC].

- a. À l'aide de la propriété d'associativité, démontrer que G est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (I, 2).
En déduire que G appartient à la médiane (AI).
- b. Démontrer que les médianes du triangle ABC sont concourantes en G.

Exercice 35 [Ch-Re-Ra-Ca] Fonction vectorielle de Leibniz

Soient A, B et C trois points de l'espace et, a , b et c trois nombres réels.

Soit f la fonction qui à tout point M de l'espace associe le vecteur : $\overrightarrow{f(M)} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$.

Partie A : étude de la fonction f

1. On suppose que $a + b + c \neq 0$.

On note G le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).

Démontrer que pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{f(M)} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$.

2. On suppose que $a + b + c = 0$.

a. Démontrer que pour tous points M et N de l'espace : $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(N)} = \vec{0}$.

b. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Partie B : applications

- 1) Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

- 2) Déterminer l'ensemble des points N de l'espace tels que : $\|2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}\| = 3$.

- 3) Justifier que le vecteur $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Puis, après avoir placé A, B et C, représenter ce vecteur.